Boolsk algebra

For
IT studerende

Denne og andre kan findes på: https://synkro.dk/bog

Henrik Kressner

Indholdsfortegnelse

Det er logik sagde manden, han lo og gik.

1 Indledning

Jeg kunne ikke finde noget brugbart på nettet, så nu har jeg lavet dette.

Forklaringerne er bygget omkring logiske kredse også kaldet gate kredsløb.

Det er en fordel hvis læseren har et grundliggende kendskab til det binære talsystem.

2 Logiske kredsløb

Inden for logikken arbejder vi med 2 tilstande, sand og falsk, kaldet true og false.

Logiske kredsløb er microchips der indeholder en elektronik der arbejder ud fra logiske principper, hvilket betyder der kun kan være to tilstande, sand eller falsk, alle andre muligheder er en fejl.

Inden for elektronik betragter man normalt ingen spænding som falsk, og spænding som sand, men der er andre terminologier:

Eksempel:

Hvis et system kører på en volt (1V) kan man vælge at definere alle spændinger fra ½ volt til en volt for at være sand, alle spændinger fra 0 volt til ½ volt vil så være falsk. Opstår der andre spændinger er noget brændt af, og vi kan ikke stole på elektronikken.

I praksis vil man indføre en hysterese, hvilket betyder man definerer falsk som 0-0,25 Volt, og sand som 0,70-1 volt, alle andre spændinger vil blive betragtes som defekt elektronik.

Der findes også negativ logik, der er blot byttet om så høj er false og lav er true, det vil vi ikke komme yderligere ind på i dette kompendie.

Operatorer

Inden for logik har vi grundliggende 3 operatorer kaldet NOT, AND og OR, som kan oversættes til dansk som:

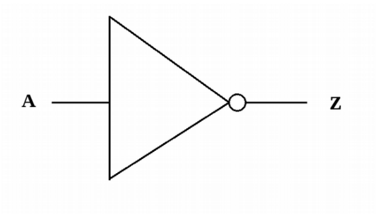
NOT = IKKE

AND = OG

OR = ELLER

Man kan illustrere operatorene med deres elektronik ækvivalent, kaldet gatekredsløb, og sætte en sandhedstabel på:

NOT operatoren



Sandhedstabel

A	Z
Sand	Falsk
Falsk	Sand

Figur 2.1

Figur 2.1 viser til venstre diagramsymbolet for NOT, til højre er sandhedstabellen for NOT. Det kan ses at output (Z) er det modsatte af input (A). Dette kan også skrives som $\overline{A}$ eller:

$Z = \overline{A}$ udtales som Z er lig med NOT A

NOT kaldes også for "det modsatte", negering og "den omvendte".

AND operatoren

A	B	Z
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

Figur 2.2

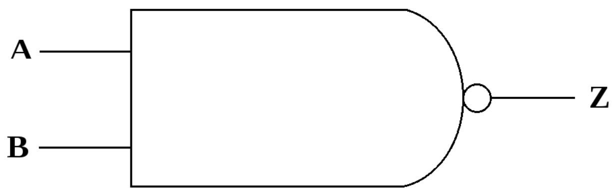
Figur 2.2 viser diagramsymbolet og sandhedstabellen for AND. Det kan ses at output (Z) er kun sand HVIS A OG B er sand. Dette kan skrives som:

$Z = A \bullet B$ Udtales som Z er lig med A AND B

Og kaldes det boolske udtryk.

Vi kan sætte de forskellige kredsløb sammen i et netværk, og kan beskrive det netværk med et logisk udtryk. Hvis vi sætter en NOT efter en AND får vi en såkaldt NAND (Not AND) , det vil se således ud:

NAND



A	B	Z
False	False	True
False	True	True
True	False	True
True	True	False

Figur 2.2

Det boolske udtryk for netværket i figur 3.1 er:

$$Z = \overline{A \bullet B}$$

OR operatoren

A	B	Z
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

Figur 2.4

Figur 2.3 viser diagramsymbolet og sandhedstabellen for OR. Det kan ses at output (Z) er sand HVIS A ELLER B er sand. Det boolske udtryk ser således ud.

$$Z = A + B \quad \text{Udtales som Z er lig med A OR B}$$

OR kan kombineres med en NOT på samme måde som i Figur 2.3, i så fald opstår en NOR. (Not OR)

For at give bedre plads vil vi nu gå over til at betegne Sand med 1 og falsk med 0, vi er jo på digital form og arbejder i totalsystemet.

De tre sandhedstabeller vil nu se således ud:

NOT

A	Z
0	1
1	0

AND

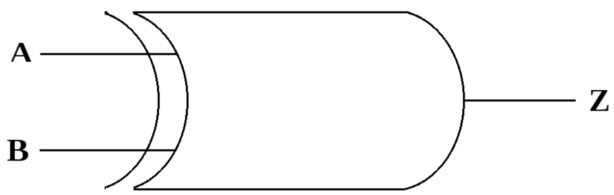
A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bemærk de operatorer vi bruger i de boolske udtryk kan minde om notering for vektorer, det har dog intet med hinanden at gøre.

XOR operatoren



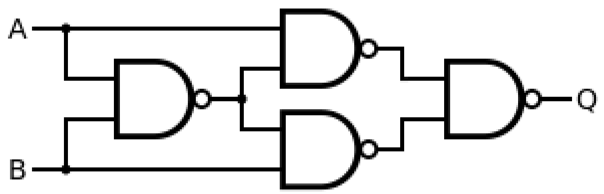
A	B		Z
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1		0

Figur 2.5

Figur 2.5 viser symbolet og sandhedstabellen for XOR. Det kan ses at output (Z) er sand HVIS A og B er FORSKELIG. Det boolske udtryk for XOR ser således ud:

$Z = A \oplus B$ Udtales som Z er sand hvis A og B er forskellig

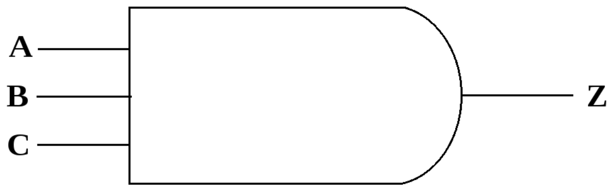
XOR kan dannes ved at sammensætte forskellige boolske udtryk på en passende måde. XOR bruges meget som selvstændig begreb, så der er taget et eksempel uden kommentar med på Fig 2.6.



A	B		Z
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1		0

Figur 2.6

AND og OR kan have uendelig mange input, hvilket blot medfører sandhedstabellen vokser.



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Figur 2.6

Det boolske udtryk for figur 2.6 er:

$$Z = A \bullet B \bullet C$$

3 Regneregler

Regneregler for OR

1. $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$

2. $A + B = B + A$

3. $A + A = A$

4. $A + 1 = A$

5. $A + 0 = A$

Regneregler for AND

6. $A \bullet B \bullet C = (A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$

8. $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$

9. $A \bullet B = B \bullet A$

10. $A \bullet A = A$

11. $A \bullet 1 = A$

12. $A \bullet 0 = 0$

Regneregler for NOT

13. $\overline{\overline{A}} = A$

14. $\overline{A} + A = 1$

15. $\overline{A} \bullet A = 0$

Reducering af et Boolsk udtryk:

Ud fra regnereglerne kan vi reducere et udtryk.

Eksempel 1, vi udnytter at $A + A = A$

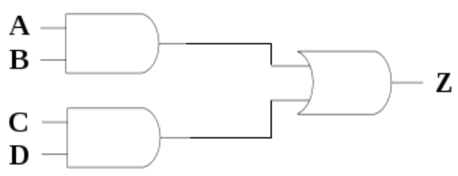
$A + A + B + C + B + B \bullet C = A + B + C + B \bullet C$

Eksempel 2, vi udnytter at $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$ og at $\overline{\overline{A}} = A$

$A \bullet B + A \bullet C + \overline{\overline{A}} \bullet D = A \bullet (B + C + D)$

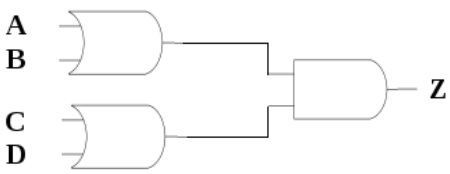
4 Eksempler

I Figur 4.1 har vi 4 input via 2 AND der bliver OR'et sammen til output Z.

	Det boolske udtryk for netværket til venstre er: Z = (A ● B) + (C ● D) Eller på almindeligt dansk: Z er sand hvis A OG B er sand, ELLER hvis C OG D er sand.

Figur 4.1

I Figur 4.2 har vi 4 input via 2 OR der bliver AND'et sammen til output Z.

	Det boolske udtryk for netværket til venstre er: Z = (A +B) ● (C + D) Eller på almindeligt dansk: Z er sand hvis A ELLER B er sand, OG C ELLER D er sand.

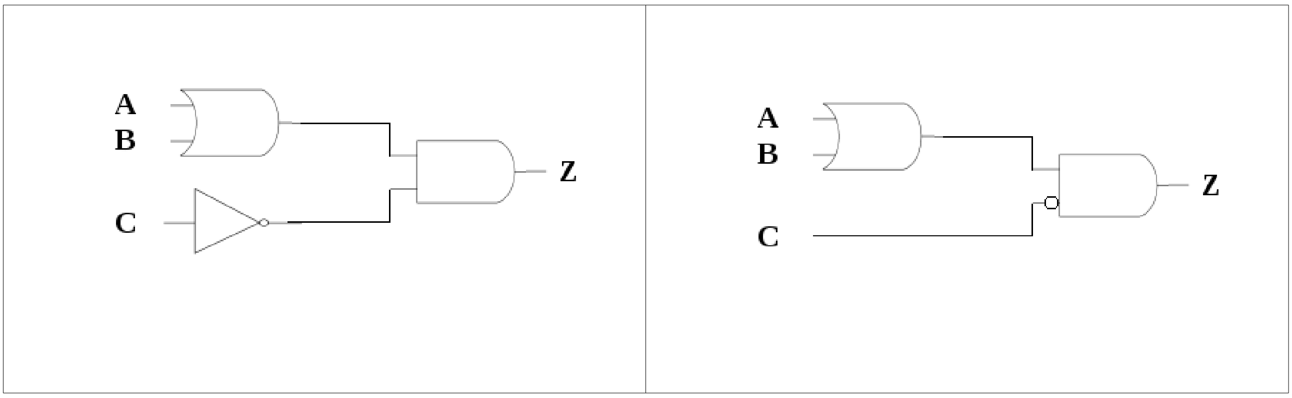
Figur 4.2

For at forstå logikken kan vi skrive sandhedstabellen op på denne måde.

(A	+ B)	● (C	+ D)	| Z
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Bemærk: Selv om vi sætter udtrykket ind i sandhedstabellen, er systematikken i sandhedstabellen ikke ændret, vi tæller digitalt fra nul (0000) til 15 (1111).

Vi kan lave et andet kredsløb som figur 4.3



Figur 4.3

De to kredsløb i figur 4.3 er ens i virkemåde. Til venstre har vi sat en inverter på som en selvstændighed enhed. Til højre har vi sat en bolle (negering) på den nederste indgang på AND gate'en. Det er to måder at vise det samme på.

Det boolske udtryk for figur 4.3 er:

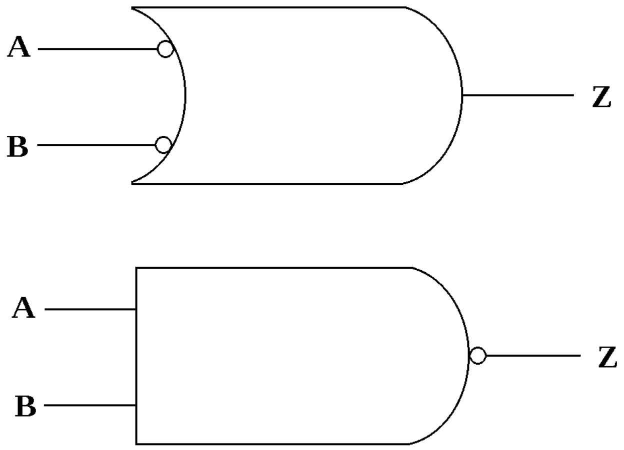
$$Z = (A + B) \bullet \overline{C}$$

Udtrykt på jævnt dansk: Z er sand hvis A ELLER B er sand OG C er falsk.

Igen kan vi lave en sandhedstabel:

(A +	B) ●	$\overline{C}$	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

De Morgans lov



A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figur 3.5

På figur 3.5 er vidst 2 figurer, den øverste er en OR gate hvor begge (alle) indgange er inverteret, den anden er en AND gate hvor udgangen er inverterede.

Det boolske udtryk for OR gate'en ser således ud:

$$Z = \overline{A} + \overline{B}$$

Det boolske udtryk for NAND gate'en ser således ud:

$$Z = \overline{A \bullet B}$$

Da sandhedstabellen for de to netværk er ens, kan vi konstatere de to udtryk er ens:

$$Z = \overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Denne regel kaldes De Morgans lov, hvilket betyder vi kan skifte en NAND gate ud med en OR gate hvor begge (alle) indgange er inverterede, eller vi kan tage en OR gate hvor begge indgange er inverterede, og skifte den ud med en NAND gate.

Reducering med DeMorgan

$$\overline{A \bullet B + C} \;=\; \overline{A} + \overline{B} \bullet \overline{C}$$

eller:

$$\overline{\overline{A \bullet B + C}} \;=\; A \bullet B + C$$

Vi kan komme lidt mere kød på:

$$\overline{A + C \bullet B + C} \;=\; \overline{A} \bullet \overline{C} + \overline{B} \bullet \overline{C} \;=\; (\overline{A} + \overline{B}) \bullet \overline{C}$$

Eller lidt mere komplekst:

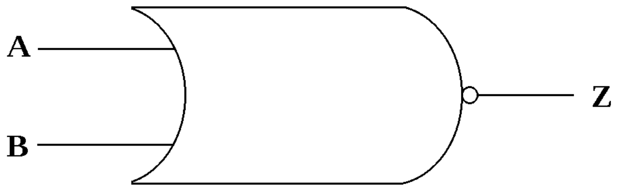
$$\overline{A \bullet B + C} \;+\; \overline{A + C \bullet B + C} \;+=\; \overline{A} + \overline{B} \bullet \overline{C} \;+\; \overline{A} \bullet \overline{C} + \overline{B} \bullet \overline{C} \;=$$

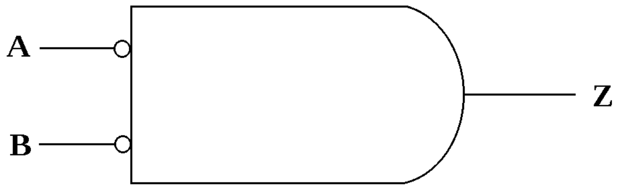
$$\overline{A} + \overline{A} \bullet \overline{C} + \overline{B} \bullet \overline{C} \;=\; \overline{A} + (\overline{A} + \overline{B}) \bullet \overline{C}$$

Som det ses kan udtryk med negeringer hurtigt blive komplekse, og dermed forvirrende. Derfor er det en god ide at undgå negeringer, hvor man kan.

5 Opgaver

1. Skriv sandhedstabellen for disse to kredsløb

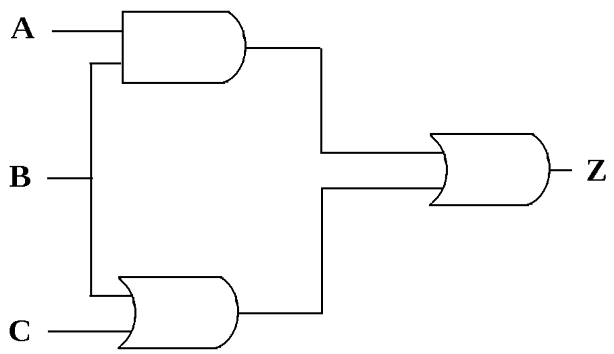




A	B	Z
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

2. Skriv det boolske udtryk for de to gate i opgave 1.

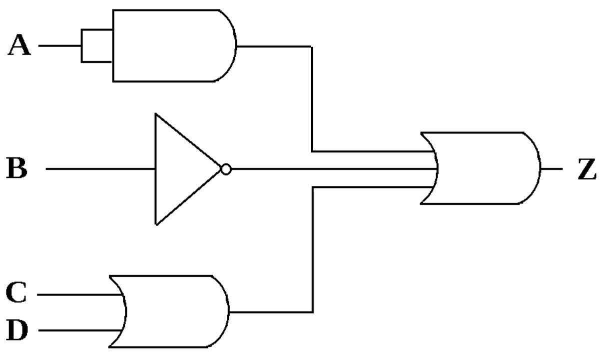
3. Skriv sandhedstabellen for dette kredsløb



A	B	C	Z
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

4. Skriv det boolske udtryk for netværket i opgave 3

Opgave 5. Skriv det boolske udtryk for dette netværk.



Opgave 6. Tegn det logiske netværk for følgende udtryk.

$Z = \overline{A} + B \bullet C$

Opgave 7. Tegn det logiske netværk for følgende udtryk.

$Z = \overline{A} \bullet B + C$

Opgave 8. Tegn det logiske netværk for følgende udtryk.

$Z = \overline{A} \bullet \overline{C} + B \bullet C$

Opgave 9. Tegn det logiske netværk for følgende udtryk.

$Z = \overline{A} \bullet \overline{C} + \overline{B} \bullet \overline{C}$

Opgave 10. Reflekter over logikkens praktiske anvendelsesmuligheder